

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapa locală, 11.02.2023

Filiera teoretică - Științele naturii

Clasa a XI-a

**1. a) (4p)** Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctele  $A'(2,1)$ ,  $B'(5,3)$ ,  $C'(3,-4)$  mijloacele laturilor sale. Aflați aria triunghiului  $ABC$  și coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului  $ABC$ .

**b) (3p)** Se consideră numerele întregi  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  și matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & b_1 \\ b_2 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ . Doi prieteni joacă

următorul joc: Andrei dă o valoare lui  $a_1$ , apoi Barbu dă o valoare lui  $b_1$ , iarăși Andrei dă o valoare lui  $a_2$ , apoi Barbu dă o valoare lui  $b_2$  și, în sfârșit, Andrei dă o valoare lui  $a_3$ . Câștigă Andrei dacă și numai dacă  $|\det A| = 1$ . Precizați tripletele  $(a_1, a_2, a_3)$  care asigură victoria lui Andrei, indiferent de alegerile făcute de Barbu, justificând răspunsul.

**2. a) (4p)** Dacă matricea  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , calculați matricea  $A = X^{4n+1} + 2^{2n} \cdot X$ , unde  $n$  este număr natural impar.

**b) (3p)** Determinați mulțimea  $M = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, X^2 - 4X + 13I_2 = O_2 \right\}$ .

**3.** Pentru funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2}$  și  $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(e^2 + 2x) - \ln(e^2 + x)}{x}, & x > 0 \\ xf\left(\frac{1}{x}\right), & x < 0 \end{cases}$ ,

determinați valorile reale ale parametrilor  $a$  și  $b$ , în fiecare din cazurile:

**a) (4p)** funcția  $g$  are limită în punctul 0.

**b) (3p)** dreapta  $y = 2x - \frac{1}{3}$  este asimptotă spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

**4. (7p)** Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.