

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapa locală, 11.02.2023

Filiera teoretică - Științele naturii

Clasa a XII-a

1. (7p) Determinați numerele reale $a \in (0, \pi)$ pentru care are loc egalitatea $\int_0^a (\sin x + \sqrt{3} \cos x) dx = 1 + \sqrt{2}$.

2. Distanța focală f a unui sistem format din două lentile având distanțele focale f_1 , respectiv f_2 , situate la distanța $d > 0$ una față de cealaltă, este dată de legea de compoziție $f_1 * f_2 = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$ definită pe $R_+^* \times R_+^*$.

a) (4p) Demonstrați că legea de compoziție „*” este asociativă;

b) (3p) Determinați distanța d dintre lentile, știind că $d * (2d) * (3d) * \dots * (2023d) = 11$.

3. Se definește legea de compoziție asociativă $X \circ Y = X \cdot Y + X + Y$ pe mulțimea $G \times G$, unde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & bi \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}.$$

a) (3p) Demonstrați că toate elementele lui G sunt simetrizabile în raport cu legea de compoziție „ \circ ”;

b) (4p) Rezolvați în mulțimea G ecuația $A \circ A = -6A' + \begin{pmatrix} 0 & 20i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde A' este simetrica matricei A în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.

4. a) (4p) Demonstrați că $\int_0^1 (x+1) \ln(x+1) dx \geq \int_0^1 \arctg x dx$;

b) (3p) Calculați integrala definită $\int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)^{x+1} + (x^2+1) \arctg x}{(x^2+1)(x+1)} \right) dx$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.