

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapa locală, 11.02.2023

Filiera tehnologică

Clasa a IX-a

1. Se consideră predicatul $p(x)$: „ $x + \frac{1}{x} \geq 2, x \in \mathbb{R}^*$ ”.

a) (5p) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor particulare $p(1), p(-2)$ și determinați mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$.

b) (2p) Demonstrați că $\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$, oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z .

2. Se consideră mulțimile:

$I_a = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-5| \leq a\}$ și $J_a = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = a\right\}$, unde $a \in \mathbb{N}$ și $[t]$ reprezintă partea întreagă a numărului real t .

a) (3p) Calculați $I_1 \cap J_1$ și $I_1 \cup J_1$.

b) (4p) Determinați valorile lui a pentru care $I_a \cap J_a = \emptyset$.

3. Într-o livadă se plantează pomi fructiferi. Pe primul rând se plantează 3 pomi, apoi, pe fiecare rând, se plantează cu 4 pomi mai mult decât pe rândul precedent.

a) (3p) Există un rând cu 99 de pomi? Dar cu 120 de pomi? Justificați răspunsurile.

b) (4p) Știind că s-au plantat 20100 de pomi, stabiliți câte rânduri are livada.

4. În triunghiul ABC punctele M, N, M' și N' sunt alese astfel încât să aibă loc relațiile:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MM'} = \frac{3}{5} \overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{NN'} = \frac{5}{6} \overrightarrow{BN'}.$$

a) (2p) Realizați un desen corespunzător.

b) (5p) Arătați că punctele M', A și N' sunt coliniare.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.