

Barem de corectare CMAA 2023 Clasa a XII-a - Științele naturii
P1 – supliment GM

$\int_0^a (\sin x + \sqrt{3} \cos x) dx = 2 \int_0^a \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) dx = -2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \Big _0^a$	3p
$-2 \cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	2p
$a_1 = \frac{5\pi}{12}, a_2 = \frac{11\pi}{12}$	2p

P2

<p>a) $(f_1 * f_2) * f_3 = \frac{\frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} \cdot f_3}{\frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} + f_3 - d} = \frac{f_1 f_2 f_3}{f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3 - d(f_1 + f_2 + f_3) + d^2}$, pentru</p> <p>oricare $f_1, f_2, f_3 \in R_+^*$ (în baza asociativității înmulțirii și a distributivității înmulțirii față de adunarea numerelor reale)</p>	2p
<p>$f_1 * (f_2 * f_3) = \frac{f_1 \cdot \frac{f_2 \cdot f_3}{f_2 + f_3 - d}}{f_1 + \frac{f_2 \cdot f_3}{f_2 + f_3 - d} - d} = \frac{f_1 f_2 f_3}{f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3 - d(f_1 + f_2 + f_3) + d^2} = (f_1 * f_2) * f_3$,</p> <p>pentru oricare $f_1, f_2, f_3 \in R_+^*$, deci legea de compoziție „*” este asociativă.</p>	2p
b) Se observă că $d * f_i = d$, pentru orice $f_i \in R_+^*, i \in N^*$.	2p
Se obține $d * [(2d) * (3d) * \dots * (2023d)] = d = 11$.	1p

P3 - Liana Agnola

a) Legea de compoziție este comutativă, iar $O_2 \in G$ este element neutru deoarece $O_2 \circ X = X \circ O_2 = X, \forall X \in G$.	1p
<p>Fie $A' = \begin{pmatrix} a' & b'i \\ 0 & a' \end{pmatrix}$, simetrica matricei A; din $A' \circ A = A \circ A' = O_2 \Rightarrow a' = -\frac{a}{a+1}, b' = -\frac{b}{(a+1)^2}$,</p> <p>deci toate elementele lui G sunt simetrizabile în raport cu legea de compoziție „o”.</p>	2p
b) Înlocuind în ecuația din enunț se obține sistemul $\begin{cases} a^3 + 3a^2 - 4a = 0 \\ 2b(a+1)^3 - 6b - 20(a+1)^2 = 0 \end{cases}$	1p
Cu soluțiile $(0, -5), (1, 8), (-4, -3)$	2p
Ecuația are soluțiile: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -5i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 8i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -4 & -3i \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.	1p

P4

a) Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow R, f(x) = (x+1) \ln(x+1) - \arctg x$	1p
<p>$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow f$ crescătoare pe $[0, 1]$ și cum</p> <p>$f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \forall x \in [0, 1]$</p>	2p
Se obține $(x+1) \ln(x+1) \geq \arctg x \Rightarrow \int_0^1 (x+1) \ln(x+1) dx \geq \int_0^1 \arctg x dx$.	1p
b) $I = \int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x^2+1} + \frac{\arctg x}{x+1} \right) dx = \int_0^1 ((\ln(x+1)) \arctg x)' dx = ((\ln(x+1)) \arctg x) \Big _0^1 = \frac{\pi}{4} \ln 2$	3p