

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapa locală, 11.02.2023

Filiera tehnologică

Clasa a X-a

1. (7p) Se consideră numerele: $a = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \dots \cdot \sqrt{\frac{99}{100}}$,
- $$b = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120} + \sqrt{121}},$$
- $$c = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Demonstrați că numerele a, b, c sunt raționale și calculați media lor geometrică.

2. Se consideră numerele complexe $z_n = \left(\frac{2-i}{2+i}\right)^n + \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$.

a) (3p) Determinați $\text{Im}(z_1)$.

b) (4p) Arătați că $z_{2023} \in \mathbb{R}$.

3. Dacă $a = \log_{30} 2$ și $b = \log_{30} 5$, atunci

a) (3p) Exprimați numărul $\log_{30} 3$ în funcție de a și b ;

b) (4p) Arătați că $\lg 135 = \frac{3 - 3a - 2b}{a + b}$.

4. La data de 1.01.2000 efectivul populației unei localități era de 123000 de persoane. Efectivul populației se determină după legea $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty), f(t) = 123000 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$, unde t este timpul exprimat în ani începând de la data de 1.01.2000.

a) (3p) Determinați efectivul populației la data de 1.01.2020.

b) (4p) După câți ani populația va ajunge la un efectiv de 984000 de persoane?

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.