

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapa locală, 11.02.2023

Filiera teoretică - Filiera tehnologică

Clasa a XII-a

1. (7p) Se consideră mulțimea de matrice $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătați că are loc identitatea $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + 1)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ și calculați produsul $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(100)$.

2. Se consideră legea de compoziție „ \circ ” definită pe $R \times R$ prin relația $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a$.

a) (3p) Demonstrați că (R, \circ) este monoid comutativ;

b) (4p) Determinați $x \in R$, astfel încât $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2022 \text{ de ori}} = x$.

3. Se dau integralele definite $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2\sin x + 3\cos x} dx$ și $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx$.

a) (3p) Calculați numărul $2J - 3I$;

b) (4p) Determinați valorile I și J .

4. Consumul de energie electrică realizat de familia Ionescu pe durata a 24 de ore este modelat de o funcție $K : [0, 24] \rightarrow \mathbb{R}$, K derivabilă, $K(t) = \int_0^t (x+1) \cdot e^{-x} dx$, unde $K(t)$ reprezintă cantitatea de energie consumată în intervalul de timp $[0, 24]$, exprimată în kw/h.

a) (2p) Demonstrați că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = -e^{-x} \cdot (x+2)$ este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$ pe \mathbb{R} .

b) (5p) Arătați că, în cea de-a doua oră, adică în intervalul orar $[1, 2]$, familia Ionescu a consumat mai puțin decât în prima oră, adică în intervalul orar $[0, 1]$. Se va folosi $e \approx 2,72$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.